УДК 004.42:510.69

О.С. Шкільняк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
Україна, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 60

Секвенційні числення темпоральних і мультимодальних логік часткових предикатів

O.S. Shkilniak
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Ukraine, 01601, Kyiv, Volodymyrska st., 60

Sequent Calculi for Temporal and Multimodal Logics of Partial Predicates

О.С. Шкильняк
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
Украина, 01601, г. Киев, ул. Владимирская, 60

Секвенциальные исчисления темпоральных и мультимодальных логик частичных предикатов

У статті досліджено транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки. Для таких логік розглянуто властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Побудовано секвенційні числення чистих першопорядкових темпоральних і мультимодальних логік еквітонних предикатів. Для цих числень доведено теореми коректності й повноти.
Ключові слова: модальна логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

We study transitional composition-nominative modal logics. The properties of logical consequence relation for sets of state-specified formulas for these logics are investigated. Sequent calculi are constructed for pure first-order temporal and multimodal logics of equitone predicates. For the defined calculi the soundness and completeness theorems are proved.
Key words: modal logic, predicate, logical consequence, sequent calculus.

В статье исследованы транзиционные композиционно-номинативные модальные логики. Для таких логик рассмотрены свойства отношения логического следствия для множеств специфицированных состояниями формул. Построены секвенциальные исчисления чистых первопорядковых темпоральных и мультимодальных логик эквитонных предикатов. Для этих исчислений доказаны теоремы корректности и полноты.
Ключевые слова: модальная логика, предикат, логическое следствие, секвенциальное исчисление.

Вступ

Розвиток інформатики та програмування характеризується появою нових розділів математичної логіки, які мають велике практичне значення [1]. Особливе місце серед них посідають модальні логіки. Апарат темпоральних логік успішно застосовується для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. На базі цих логік побудовано багато різноманітних систем та мов специфікацій. Епістемічні логіки використовують для опису інтелектуальних інформаційних систем, експертних систем, баз даних і баз знань з неповною інформацією.

Традиційні модальні логіки базуються на класичній логіці предикатів. Проте класична логіка має низку обмежень, що ускладнює її використання в інформатиці та програмуванні. Тому на перший план виходить проблема побудови нових класів логічних формалізмів на єдиній з програмуванням концептуальній основі. Такою основою є запропонований М.С. Нікітченком [2] композиційно-номінативний підхід. Логіки, збудовані на його базі, називають композиційно-номінативними.

Можливості модальних логік та композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів синтезують композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ) [3]. Важливим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), які відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей, описуючи переходи від одного стану світу до іншого. Підкласами ТМЛ є мультимодальні (ММЛ) та темпоральні (ТмМЛ) композиційно-номінативні логіки. Окремими випадками ММЛ є загальні ТМЛ та епістемічні КНМЛ. Загальні ТМЛ та ТмМЛ реномінативного й першопорядкових рівнів досліджувались, зокрема, в роботах [4-7], для них збудовано числення секвенційного типу. Семантичні властивості ММЛ та епістемічних ТМЛ вивчались в [6], [7].

Метою даної роботи є побудова секвенційних числень для чистих першопорядкових ТмМЛ та ММЛ. Такі числення індуковані реляційною семантикою цих логік, вони будуються на основі властивостей відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Подібні секвенційні числення для загальних ТМЛ та ТмМЛ збудовано в [4], особливістю пропонованих у даній роботі числень для ТмМЛ і ММЛ є використання нових секвенційних форм елімінації модальностей, а також форм елімінації кванторів під реномінаціями. Для побудованих числень доведено теореми коректості та повноти.

Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі робіт [3], [7].

Семантичні властивості транзиційних модальних систем

Поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС) є основним поняттям КНМЛ. Під КНМС будемо розуміти об'єкт вигляду $M = (Cms, Fm, Jm)$, де *Cms* – композиційна модальна система (КМС), *Fm* – множина формул відповідної мови КНМЛ, *Jm* – відображення інтерпретації формул на станах світу.

КМС є семантичними моделями реляційного типу, вони задають семантичні аспекти світу. КМС мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$, де S – множина станів світу, R – множина відношень на S вигляду $\mathrm{R} \subseteq S \times S^n$, Pr – множина предикатів на станах світу, C – множина композицій на Pr. Така C визначається базовими модальними композиціями та базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня. Для чистих першопорядкових логік базові загальнологічні композиції – це $\neg$, $\vee$, $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Для КНМЛ номінативних рівнів конкретизуємо S як множину неокласичних [3] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду ${}^V A_\alpha \to \{T, F\}$. Тоді $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ – множина усіх базових даних світу, $Pr = \bigcup_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ – множина предикатів усіх станів світу.

КНМС, у яких R складається з відношень вигляду $\mathrm{R} \subseteq S \times S$, називають транзиційними модальними системами (ТМС). Трактуємо R як відношення переходу (досяжності) на станах. ТМС, у яких $R = \{\rhd_i \mid i \in I\}$ та базовими модальними композиціями є K_i, $i \in I$, де кожному $\rhd_i$ зіставлено K_i, назвемо мультимодальними (ММС).

Окремим випадком ММС є загальні ТМС (ЗТМС), для них $R=\{\triangleright\}$ та маємо єдину базову модальну композицію $\Box$. ТМС, у яких $R=\{\triangleright\}$, а базовими модальними композиціями є $\Box_{\uparrow}$ (завжди буде) та $\Box_{\downarrow}$ (завжди було), назвемо темпоральними (ТмМС).

Для ЗТМС та ТмМС традиційно задають дуальні композиції $\Diamond$ (можливо), $\Diamond_{\uparrow}$ (колись буде), $\Diamond_{\downarrow}$ (колись було): $\Diamond P$, $\Diamond_{\uparrow}P$, $\Diamond_{\downarrow}P$ означають $\neg\Box\neg P$, $\neg\Box_{\uparrow}\neg P$, $\neg\Box_{\downarrow}\neg P$.

Опишемо мову чистих першопорядкових ТМС. Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів (ПС); символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина Ms символів базових модальних композицій (модальна сигнатура).

Множина Fm формул мови визначається індуктивно:

FA) кожний $p\in Ps$ – (атомарна) формула;

FL) нехай $\Phi, \Psi\in Fm$; тоді $\neg\Phi\in Fm$, $\vee\Phi\Psi\in Fm$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in Fm$, $\exists x\Phi\in Fm$;

FM) нехай $\Phi\in Fm$, $⌘\in Ms$; тоді $⌘\Phi\in Fm$.

У випадку ММС маємо $Ms=\{\mathrm{K}_i \mid i\in I\}$, тоді п. FM визначення формули має вигляд:

FK) нехай $\Phi\in Fm$, $\mathrm{K}_i\in Ms$; тоді $\mathrm{K}_i\Phi\in Fm$.

У випадку ТмМС маємо $Ms=\{\Box_{\uparrow}, \Box_{\downarrow}\}$, п. FM визначення формули має вигляд:

F$\Box_{\uparrow\downarrow}$) нехай $\Phi\in Fm$; тоді $\Box_{\uparrow}\Phi, \Box_{\downarrow}\Phi\in Fm$.

У випадку ЗТМС маємо $Ms=\{\Box\}$, тоді п. FM визначення формули має вигляд:

F$\Box$) нехай $\Phi\in Fm$; тоді $\Box\Phi\in Fm$.

Задамо відображення інтерпретації атомарних формул на станах $Im: Ps\times S\to Pr$, при цьому $Im(p,\alpha)\in Pr_{\alpha}$. Таке Im продовжимо до відображення інтерпретації формул на станах $Jm: Fm\times S\to Pr$. При цьому $Jm(\Phi,\alpha)\in Pr_{\alpha}$.

IA) $Jm(p,\alpha) = Im(p,\alpha)$ для всіх $p\in Ps$;

IL) $Jm(\neg,\alpha) = \neg(Jm(\Phi,\alpha))$; $Jm(\vee\Phi\Psi,\alpha) = \vee(Jm(\Phi,\alpha), Jm(\Psi,\alpha))$;

$$Jm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi,\alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Jm(\Phi,\alpha));$$

$$Jm(\exists x\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=T \text{ для деякого } a\in A_{\alpha}, \\ F, & \text{якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=F \text{ для всіх } a\in A_{\alpha}, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для модалізованих формул маємо таке. У випадку ММС додаємо такий пункт:

$$\text{IK) } Jm(\mathrm{K}_i\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \alpha\triangleright_i\delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta\in S:\ \alpha\triangleright_i\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha\triangleright_i\beta$, то $Jm(\mathrm{K}_i\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in{}^{V}\!A_{\alpha}$.

У випадку ТмМС додаємо пункт:

$$\text{I}\Box_{\uparrow\downarrow}\text{) } Jm(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \alpha\triangleright\delta, \\ F, & \text{якщо існує } \delta\in S:\ \alpha\triangleright\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

$$Jm(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, & \text{якщо } Jm(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \delta\triangleright\alpha, \\ F, & \text{якщо існує } \delta\in S:\ \delta\triangleright\alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d)=F, \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha\triangleright\beta$, то $Jm(\Box_{\uparrow}\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in{}^{V}\!A_{\alpha}$; якщо для α не існує такого β, що $\beta\triangleright\alpha$, то $Jm(\Box_{\downarrow}\Phi,\alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in{}^{V}\!A_{\alpha}$.

У випадку ЗТМС додаємо пункт:

$$\text{I}\Box)\ Jm(\Box\Phi,\alpha)(d) = \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta\in S:\ \alpha \rhd \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S:\ \alpha\rhd\delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha \rhd \beta$, то $Jm(\Box\Phi, \alpha)(d)\uparrow$ для кожного $d\in{}^{V}A_{\alpha}$.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_{α}.

ТМС будемо скорочено позначати у вигляді (S, R, A, Jm).

Визначення: типу ТмМС, ММС, ЗТМС даємо так, як і для загального випадку КНМС [5]. Дамо визначення істинної в стані та в ТМС, всюди істинної формули.

Формула Φ істинна в стані α, якщо Φ_{α} – істинний предикат. Φ істинна в ТМС (ТмМС, ММС, ЗТМС) M (позн. $M|=\Phi$), якщо Φ_{α} є істинним для кожного $\alpha\in S$.

Φ усюди істинна (позн. $|=\Phi$), якщо $M|=\Phi$ для всіх ТМС M одного типу.

Залежно від властивостей відношень переходу можна визначати різні класи ТМС. Традиційно розглядають випадки, ці відношення можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними. Якщо в ММС всі $\rhd_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ R; якщо всі $\rhd_i$ транзитивні, то пишемо T; якщо всі $\rhd_i$ симетричні, то пишемо S. Отримуємо такі чисті типи ММС:

R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Подібним чином отримуємо [5-7] аналогічні класи ТмМС та ЗТМС:

Зауважимо, що для загального випадку ММС можливі набагато складніші, змішані типи (напр., $\rhd_1$ – симетричне, $\rhd_2$ – транзитивне й рефлексивне і т.п.).

ММС із скінченними множинами однотипних відношень переходу названо [6], [7] *епістемічними*. Загальні ТМС є окремим випадком епістемічних ММС.

Виділено [5] ТМС із сильною та із загальною умовою визначеності на станах.

ТМС із сильною умовою визначеності на станах названо *St*-ТМС. Зокрема, отримуємо *St*-ММС, *St*-ЗТМС, *St*-ТмМС. Модальні композиції цих ТМС не зберігають [5] еквітонність предикатів, а зберігають лише слабку еквітонність. Отже, сильна умова визначеності може привести до порушення інформаційної монотонності.

ТМС із загальною умовою визначеності на станах названо *Gn*-ТМС. Зокрема, отримуємо *Gn*-ММС, *Gn*-ЗТМС, *Gn*-ТмМС. Базові модальні композиції цих ТМС вже зберігають [5] еквітонність, тому основну увагу варто приділити розгляду *Gn*-ТМС.

Символи модальних композицій можна [5] проносити через реномінації: для всіх $\text{⌘}\in Ms$ та Φ, $d\in{}^{V}A_{\alpha}$ маємо $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\text{⌘}\Phi_{\alpha}(d) = \text{⌘}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi_{\alpha}(d)$. Звідси $|= R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\text{⌘}\Phi \leftrightarrow \text{⌘}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$.

Тут і надалі конкретизуємо $Ms = \{\text{K}_i \mid i\in I\}$ для випадку ММС, $Ms = \{\Box_{\uparrow}, \Box_{\downarrow}\}$ для випадку ТмМС, $Ms = \{\Box\}$ для випадку загальних ТМС.

Взаємодія в ТМС модальних композицій та кванторів складніша [5].

Для довільних $\text{⌘}\in Ms$ маємо $|= \exists x\text{⌘}\Phi \to \text{⌘}\exists x\Phi$ та $|= \text{⌘}\forall x\Phi \to \forall x\text{⌘}\Phi$, водночас маємо $|\neq \forall x\text{⌘}\Phi \to \text{⌘}\forall x\Phi$ та $|\neq \text{⌘}\exists x\Phi \to \exists x\text{⌘}\Phi$.

Відношення логічного наслідку для множин формул

Введемо логічний наслідок для множин специфікованих станами формул.

Специфікована станом формула має вигляд Φ^{α}, де Φ – формула мови, α – її специфікація (відмітка). Тут $\alpha\in\text{S}$, де S – певна множина імен станів світу.

Нехай M – ТМС із множиною станів світу S, Γ – множина специфікованих станами формул, причому ці специфікації утворюють множину S.

Множина формул Γ узгоджена із ТМС M, якщо задана ін'єкція S у S.

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станами формул.

Δ є логічним наслідком Γ в узгодженій із ними КНМС M (позн. $\Gamma \models_M \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^V\!A$ із умови $\Phi_\alpha(d_\alpha) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ випливає: неможливо $\Psi_\beta(d_\beta) = F$ для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$. Надалі запис $\Gamma \models_M \Delta$ завжди означатиме узгодженість КНМС M із Γ та Δ.

Δ є логічним наслідком Γ (відносно КНМС певного типу), якщо $\Gamma \models_M \Delta$ для всіх КНМС M відповідного типу. Те, що Δ є логічним наслідком Γ, позначимо $\Gamma \models \Delta$.

Отже, $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують узгоджена із Γ та Δ КНМС M та $d \in {}^V\!A$ такі:

для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ маємо $\Phi_\alpha(d_\alpha) = T$ та для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$ маємо $\Psi_\beta(d_\beta) = F$.

Розглянемо основні властивості відношення логічного наслідку для множин, специфікованих станами формул. Немодальні властивості повторюють відповідні [3] властивості логічного наслідку для множин формул логіки еквітонних предикатів.

C) Якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models_M \Delta$.

U) Нехай $\Gamma \subseteq \Upsilon$ та $\Delta \subseteq \Sigma$. Тоді $\Gamma \models_M \Delta \Rightarrow \Upsilon \models_M \Sigma$.

$\neg_{\vdash}$) $\neg\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\alpha$.

$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, \neg\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$.

$\vee_{\vdash}$) $\Phi\vee\Psi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$ та $\Psi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$.

$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, \Phi\vee\Psi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\alpha, \Psi^\alpha$.

RT$_{\vdash}$) $R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$.

RT$_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{z,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$.

ΦN$_{\vdash}$) $R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$ (за умови $y \in \mu(\Phi)$).

ΦN$_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{y,\bar{v}}_{z,\bar{x}}(\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$ (за умови $y \in \mu(\Phi)$).

R$\neg_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$.

R$\neg_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\neg\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \neg R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)^\alpha$.

R$\vee_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$.

R$\vee_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi\vee\Psi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Phi)\vee R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\Psi)^\alpha$.

RR$_{\vdash}$) $R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$.

RR$_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(R^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi))^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{v}}_{\bar{x}} \circ^{\bar{w}}_{\bar{y}}(\Phi)^\alpha$.

R∃R$_{\vdash}$) $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$ ($x \notin \{\bar{u}\}$ за визначенням $R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}$).

Зокрема, $R^{x}_{y}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$.

R∃R$_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\exists x\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)^\alpha$ (тут $x \notin \{\bar{u}\}$).

Зокрема, $\Gamma \models_M \Delta, R^{x}_{y}(\exists x\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \exists x\Phi^\alpha$.

Властивості, пов'язані з елімінацією кванторів:

∃R$_{\vdash}$) $R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$ (тут $y \in V_T$, $y \notin nm(\Gamma, \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$);

$\exists_{\vdash}$) $\exists x\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R^{x}_{y}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$ (тут $y \in V_T$ та $y \notin nm(\Gamma, \Delta, \Phi)$);

∃R$_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(\Phi)^\alpha, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi)^\alpha$;

$\exists_{\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, R^{x}_{y}(\Phi)^\alpha, \exists x\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \exists x\Phi^\alpha$.

R⌘$_{|-}$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(⌘\Phi)^{\alpha} \models_M \Delta \Leftrightarrow \Gamma, ⌘R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha} \models_M \Delta$, де ⌘$\in Ms$;

R⌘$_{-|}$) $\Gamma \models_M \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(⌘\Phi)^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, ⌘R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^{\alpha}$, де ⌘$\in Ms$.

Зокрема, для ММС отримуємо R$К_{i|-}$ та R$К_{i-|}$, де $К_i \in M$; для загальних ТМС отримуємо R$\Box_{|-}$ та R$\Box_{-|}$; для ТмМС отримуємо R$\Box\uparrow_{|-}$, R$\Box\downarrow_{|-}$, R$\Box\uparrow_{-|}$ та R$\Box\downarrow_{-|}$.

Розглянемо елімінацію модальностей. У випадку ММС маємо (тут $К_i \in Ms$):

$К_{i\,|-}$) $К_i\,\Phi^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd_i \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$К_{i\,-|}$) $\Gamma \models_M \Delta, К_i\,\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd_i \beta$.

У випадку загальних ТМС маємо:

$\Box_{|-}$) $\Box\Phi^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_{-|}$) $\Gamma \models_M \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$.

У випадку ТмМС маємо:

$\Box\uparrow_{|-}$) $\Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box\uparrow_{-|}$) $\Gamma \models_M \Delta, \Box_{\uparrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$;

$\Box\downarrow_{|-}$) $\Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha}, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^{\beta} \mid \beta \rhd \alpha\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box\downarrow_{-|}$) $\Gamma \models_M \Delta, \Box_{\downarrow}\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для всіх станів $\beta \in S$ таких, що $\beta \rhd \alpha$.

Наведені властивості є семантичною основою для побудови секвенційних числень ТМЛ. Властивість C задає умову замкненості секвенції, а всі інші (окрім U) властивості індукують відповідні секвенційні форми. Зауважимо, що секвенційні форми мусять зберігати $\models$ при переході від засновків до висновку (збір формули із компонентів) та зберігати $\not\models$ при переході від висновку до засновків (декомпозиція формули). Тому для властивостей відношення $\models$ можна записати відповідні *дуальні* властивості відношення $\not\models$. Майже для всіх властивостей відношення $\models$ такі дуальні властивості відношення $\not\models$ отримуємо заміною $\models_M$ на $\not\models_M$, лише для $\vee_{|-}$ та властивостей вигляду ⌘$_{-|}$ дуальні властивості $_{|-}\vee$ та $_{-|}$⌘ задаємо інакше:

$_{|-}\vee$) $\Phi\vee\Psi^{\alpha}, \Gamma \not\models_M \Delta \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma \not\models_M \Delta$ або $\Psi^{\alpha}, \Gamma \not\models_M \Delta$;

$_{-|}\Box$) $\Gamma \not\models_M \Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma \not\models_M \Delta, \Phi^{\beta}$ для деякого стану $\beta \in S$ такого, що $\alpha \rhd \beta$.

Аналогічно записуємо $_{-|}\Box\uparrow$ і $_{-|}\Box\downarrow$ для ТмМС, $_{-|}К_i$ для ММС.

Побудова секвенційних числень ММЛ та ТмМЛ

Специфікація стану – це слово вигляду $\alpha|-$ чи $\alpha-|$, де α – ім'я стану світу, в якому розглядається специфікована формула. Стани іменуємо натуральними числами. Початковий стан позначатимемо як 0.

Секвенції збагачуємо збудованими на даний момент виведення множиною S станів та множиною R відношень на S. Секвенційні форми повинні враховувати можливість зміни носіїв станів світу (форми $_{|-}\exists$, $_{|-}\exists$R), тому для кожного $\alpha \in S$ треба вказувати збудовану на даний момент множину його базових даних A_{α}. Отже, збагачені секвенції записуємо як Σ // $\alpha\{A_{\alpha}\}$, $\beta\{A_{\beta}\}$, … // M, скорочено як Σ // St // M. Тут Σ – множина специфікованих формул; St – збудована на даний момент множина імен станів; $\alpha\{A_{\alpha}\}$, $\beta\{A_{\beta}\}$, … – побудовані на даний момент стани із множинами їх базових даних; M – схема моделі світу на даний момент, тобто збудоване на цей момент відношення досяжності, записане для імен станів світу.

Опишемо базові секвенційні форми числень чистих першопорядкових ММЛ та ТмМЛ еквітонних предикатів. Спочатку наведемо форми, аналогічні відповідним

формам числень логіки еквітонних квазіарних предикатів [3]. Вони не змінюють схему моделі світу, але форми $\vdash\exists$, $\vdash\exists$R змінюють стани. Це такі форми:

$$\vdash\neg\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv A,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash \neg A,\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\neg\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash A,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv \neg A,\Sigma\ //St//M};$$

$$\vdash\vee\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash A,\Sigma\ //St//M \qquad {}_{\alpha}\!\vdash B,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash A\vee B,\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\vee\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv A,\ {}_{\alpha}\!\dashv B,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv A\vee B,\Sigma\ //St//M};$$

$$\vdash\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//\ M};$$

$$\vdash\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //St//M};$$

$$\vdash\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv \neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//M};$$

$$\dashv\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//M};\qquad \vdash\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//M};$$

$$\vdash\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //St//M}\ \text{при } y\in\mu(A);\qquad \dashv\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //\ St\ //\ M}\ \text{при } y\in\mu(A);$$

$$\vdash\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};$$

$$\vdash\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash \exists xA,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv \exists xA,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M}.$$

Форми типів RT, ΦN, R∃R, R∃p назвемо допоміжними, усі інші форми основні.

Форми елімінації кванторів мають вигляд:

$$\vdash\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\Sigma\ //St'//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\ {}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};$$

$$\vdash\exists\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash R^{x}_{y}(A),\Sigma\ //St'//M}{{}_{\alpha}\!\vdash \exists xA,\Sigma\ //St//M};\qquad \dashv\exists\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv \exists xA,\ {}_{\alpha}\!\dashv R^{x}_{y}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv \exists xA,\Sigma\ //St//M}.$$

Для $\vdash\exists$R умови: $y\in V_T$ та $y\notin nm(\Gamma,\Delta,R^{\bar u}_{\bar v}(\exists x\Phi))$; при цьому до носія A_α стану α додається новий елемент y. Для $\vdash\exists$ умови: $y\in V_T$ та $y\notin nm(\Sigma, A)$; до A_α додається новий y.

Форми для пронесення реномінації через модальні оператори мають вигляд:

$$\vdash\mathrm{R}\text{⌘}\ \frac{{}_{\alpha}\!\vdash \text{⌘}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\vdash R^{\bar v}_{\bar x}(\text{⌘}A),\Sigma\ //St//M},\ \text{де } \text{⌘}\in Ms;\qquad \dashv\mathrm{R}\text{⌘}\ \frac{{}_{\alpha}\!\dashv \text{⌘}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha}\!\dashv R^{\bar v}_{\bar x}(\text{⌘}A),\Sigma\ //St//M},\ \text{де } \text{⌘}\in Ms.$$

Форми елімінації модальних операторів записуються по-різному залежно від властивостей відношень переходу. Традиційно розглядають випадки, коли ці відношення можуть бути транзитивними, рефлексивними чи симетричними. Для ТмМЛ треба врахувати, що при симетричності $\rhd$ оператори $\Box_{\uparrow}$ та $\Box_{\downarrow}$ діють ідентично, тому їх можна вважати єдиним оператором $\Box$. Отже, при симетричності $\rhd$ темпоральні

секвенційні числення ідентичні відповідним численням загальних ТМЛ.

Наведемо для прикладу форми $_{|-}\mathrm{K}_i$ та $_{-|}\mathrm{K}_i$ для таких випадків: на $\rhd_i$, де $i\in I$, не накладено обмежень; вони транзитивні, рефлексивні, симетричні.

Загальний випадок. Якщо на $\rhd_i$ не накладені додаткові умови, то маємо:

$$_{|-}\mathrm{K}_i\ \frac{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_iA,\ {}_{\beta_1|-}A,\dots,{}_{\beta_n|-}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_iA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Специфіковані формули ${}_{\beta_1|-}A,\dots,{}_{\beta_n|-}A$ записуємо для всіх, наявних у даний момент, станів $\beta_1,\dots,\beta_n$ таких, що $\alpha\rhd_i\beta_1,\dots,\alpha\rhd_i\beta_n$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ до схеми моделі світу M та записуємо ${}_{\beta|-}A$.

$$_{-|}\mathrm{K}_i\ \frac{{}_{\beta-|}A,\Sigma\ //\ St'//\ M\cup\{\alpha\rhd_i\beta\}}{{}_{\alpha-|}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //M}.$$

Тут β – новий стан, до схеми моделі світу M додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ та задаємо $A_\beta=A_\alpha$.

Відношення $\rhd_i$ транзитивне, рефлексивне та симетричне. Отримуємо RTS-числення. У цьому випадку маємо:

$$_{|-}\mathrm{K}_i\ \frac{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_iA,{}_{\alpha|-}A,{}_{\beta_1|-}A,\dots,{}_{\beta_n|-}A,{}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_iA,\dots,{}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_iA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha|-}\mathrm{K}_iA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Специфіковані ${}_{\beta_1|-}\mathrm{K}_iA,\dots,{}_{\beta_n|-}\mathrm{K}_iA$ тут необхідні через транзитивність $\rhd_i$. Специфіковані ${}_{\beta_1|-}A,\dots,{}_{\beta_n|-}A$ записуємо для всіх наявних в даний момент станів $\beta_1,\dots,\beta_n$ таких, що $\alpha\rhd_i\beta_j$ чи $\beta_j\rhd_i\alpha$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β, додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ та $\beta\rhd_i\alpha$ до M та записуємо ${}_{\beta|-}A$ і ${}_{\beta|-}\mathrm{K}_iA$. Згідно рефлексивності $\rhd_i$ пишемо ${}_{\alpha-|}A$.

$$_{-|}\mathrm{K}_i\ \frac{{}_{\beta-|}A,\Sigma\ //\ St'//\ M\cup\{\alpha\rhd_i\beta,\beta\rhd_i\alpha\}}{{}_{\alpha-|}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //M}.$$

Тут β – новий стан, до M додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ та $\beta\rhd_i\alpha$, задаємо $A_\beta=A_\alpha$.

Враховуючи наведені властивості відношення |=, для базових форм отримуємо:

Теорема 1. Нехай $\dfrac{{}_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}\ //\ \mathrm{M}}{{}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta\ //\ \mathrm{M}}$ та $\dfrac{{}_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}\ //\ \mathrm{M}\quad {}_{|-}\mathrm{X}_{-|}\mathrm{Z}\ //\ \mathrm{M}}{{}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta\ //\ \mathrm{M}}$ – базові секвенційні форми. Тоді: 1) якщо $\Lambda\models\mathrm{K}$, то $\Gamma\models\Delta$; 2) якщо $\Lambda\models\mathrm{K}$ та $\mathrm{X}\models\mathrm{Z}$, то $\Gamma\models\Delta$.

Наслідок. Для наведених секвенційних форм маємо:

1) із $\Gamma\not\models\Delta$ випливає $\Lambda\not\models\mathrm{K}$; 2) із $\Gamma\not\models\Delta$ випливає $\Lambda\not\models\mathrm{K}$ або $\mathrm{X}\not\models\mathrm{Z}$.

Опишемо процедуру побудови секвенційного дерева для числень першопорядкових ТМЛ. Вона в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень логік квазіарних предикатів [3]. Розглянемо особливості цієї процедури на прикладі числень ММЛ.

Побудову дерева ведемо паралельно із побудовою схеми моделі світу. Така схема оновлюється при застосуванні $_{-|}\mathrm{K}_i$-форм (інколи $_{|-}\mathrm{K}_i$-форм), які додають нові стани.

Побудова дерева розбита на етапи. На початку побудови зафіксуємо нескінченний список *TN* «нових» тотально неістотних імен, які не зустрічаються в початковій секвенції. Кожне застосування форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед застосуванням основної форми при потребі застосовуємо належну кількість разів форми типів RT, ΦN, R∃R, R∃p.

На кожному етапі спочатку виконуємо всі $_{\vdash}\exists$-форми та $_{\vdash}\exists$R-форми (при цьому задіюється нове $y \in TN$ у відповідному стані). Потім виконуємо інші основні форми, окрім форм елімінації модальностей. При цьому $_{\dashv}\exists$-форму та $_{\vdash}\exists$R-форму застосовуємо багатократно – для усіх імен доступних формул секвенції вигляду $_{\alpha\dashv}\exists xA, \Sigma$ чи $_{\alpha\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi), \Sigma$ та її наступників. Далі виконуємо $_{\dashv}$K$_i$-форми, потім $_{\vdash}$K$_i$-форми.

Процедура побудови секвенційного дерева може завершуватися або не завершуватися. Якщо процедура завершена позитивно, то маємо замкнене дерево. Якщо вона завершена негативно або не завершується, то маємо скінченне чи нескінченне незамкнене дерево. Тоді в дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях; кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на ньому і стане доступною.

Теорема 2 (коректності). Нехай секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Нехай секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Усі листи такого дерева – замкнені секвенції, тому для кожного такого листа $_{\vdash}$X$_{\dashv}$Z маємо X $\models$ Z. Рух від листів дерева до його кореня здійснюється за допомогою секвенційних форм. За теоремою 1 при переході від засновків до висновків форм зберігається відношення $\models$. Тому для кожної вершини секвенційного дерева $_{\vdash}\Lambda_{\dashv}$K справджується $\Lambda \models$ K. Зокрема, для секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ – кореня дерева – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти секвенційних числень ТМЛ використаємо метод систем модельних множин. Система модельних множин – це пара $(\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, R)$, де кожна H_α – модельна множина стану α. Такі системи також записуємо як $(\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$, де M – схема моделей світу, яка задається R.

Множина H_α специфікованих формул із $W_\alpha = nm(H_\alpha)$ – модельна множина стану α, якщо виконуються такі умови:

MC) для кожної примітивної Ф лише одна з $_{\alpha\vdash}\Phi$ чи $_{\alpha\dashv}\Phi$ може належати до H_α (це умова коректності H_α, вона індукується умовою замкненості секвенції);

MN) $_{\alpha\vdash}R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$ та $y \in \mu(\Phi) \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$;

$_{\alpha\dashv}R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$ та $y \in \mu(\Phi) \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$;

MT) $_{\alpha\vdash}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$; $_{\alpha\dashv}R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$;

M¬) $_{\alpha\vdash}\neg\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}\Phi \in H_\alpha$; $_{\alpha\dashv}\neg\Phi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}\Phi \in H_\alpha$;

M∨) $_{\alpha\vdash}\Phi\vee\Psi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}\Phi \in H_\alpha$ або $_{\alpha\vdash}\Psi \in H_\alpha$; $_{\alpha\dashv}\Phi\vee\Psi \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}\Phi \in H_\alpha$ та $_{\alpha\dashv}\Psi \in H_\alpha$;

MRR) $_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H_\alpha$;

$_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi) \in H_\alpha$;

MR¬) $_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$; $_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$;

MR∨) $_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H_\alpha$;

$_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi) \in H_\alpha$;

MR∃R) $_{\alpha\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$;

$_{\alpha\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in H_\alpha$;

MR∃p) $_{\alpha\vdash}R_{y}^{x}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi \in H_\alpha$; $_{\alpha\dashv}R_{y}^{x}(\exists x\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi \in H_\alpha$;

MR⌘) $_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(⌘\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}⌘R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$; $_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(⌘\Phi) \in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}⌘R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in H_\alpha$.

Тут $⌘\in Ms$. У випадку ЗТМЛ умову MR⌘ конкретизуємо як MR☐, у випадку ТмМЛ – як MR☐↑ та MR☐↓, у випадку ММЛ – як MRK (пишемо для всіх $К_i\in Ms$).

M∃) Якщо ${}_{\alpha|-}\exists x\Phi\in H_\alpha$, то існує $y\in W_\alpha$ таке: ${}_{\alpha|-}R_y^x(\Phi)\in H_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha-|}\exists x\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R_y^x(\Phi)\in H_\alpha$ для всіх $y\in W_\alpha$;

M∃R) якщо ${}_{\alpha|-}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$, то існує $y\in W_\alpha$ таке: ${}_{\alpha|-}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in H_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha-|}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)\in H_\alpha$, то ${}_{\alpha-|}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)\in H_\alpha$ для всіх $y\in W_\alpha$.

Елімінації модальностей індукують відповідні умови. Для ЗТМЛ це такі умови:

M☐) якщо ${}_{\alpha|-}☐\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta|-}\Phi\in H_\beta$ для всіх $\beta\in S$ таких, що $\alpha\rhd\beta$;
якщо ${}_{\alpha-|}☐\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta-|}\Phi\in H_\beta$ для деякого $\beta\in S$ такого, що $\alpha\rhd\beta$.

У випадку темпоральних КНМЛ маємо умови:

M☐↑) якщо ${}_{\alpha|-}☐{\uparrow}\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta|-}\Phi\in H_\beta$ для всіх $\beta\in S$ таких, що $\alpha\rhd\beta$;
якщо ${}_{\alpha-|}☐{\uparrow}\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta-|}\Phi\in H_\beta$ для деякого $\beta\in S$ такого, що $\alpha\rhd\beta$.
H☐↓) Якщо ${}_{\alpha|-}☐{\downarrow}\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta|-}\Phi\in H_\beta$ для всіх $\beta\in S$ таких, що $\beta\rhd\alpha$;
якщо ${}_{\alpha-|}☐{\downarrow}\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta-|}\Phi\in H_\beta$ для деякого $\beta\in S$ такого, що $\beta\rhd\alpha$.

У випадку ММЛ маємо умови (записуємо для всіх $К_i\in Ms$):

MK) якщо ${}_{\alpha|-}К_i\,\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta|-}\Phi\in H_\beta$ для всіх $\beta\in S$ таких, що $\alpha\rhd_i\beta$;
якщо ${}_{\alpha-|}К_i\,\Phi\in H_\alpha$, то ${}_{\beta-|}\Phi\in H_\beta$ для деякого $\beta\in S$ такого, що $\alpha\rhd_i\beta$.

Теорема 3 (про контрмодель). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, H_α – множина всіх специфікованих ${}_{\alpha|-}$ чи ${}_{\alpha-|}$ формул секвенцій шляху $\wp$, M – об'єднання усіх схем моделей світу секвенцій шляху $\wp$, нехай $Н_M=(\{H_\alpha\,|\,\alpha\in S\}, M)$ та $W=nm(Н_M)$. Тоді існують ТМС $M=(S, R, A, Jm)$ та $\delta\in{}^{V}\!A$ з $im(\delta)=W$ такі:

1) ${}_{\alpha|-}\Phi\in H_\alpha\Rightarrow\Phi_\alpha(\delta)=T$; 2) ${}_{\alpha-|}\Phi\in H_\alpha\Rightarrow\Phi_\alpha(\delta)=F$.

$Н_M$ – система модельних множин. Справді, для переходу від нижчої вершини шляху до вищої використовуємо одну з базових секвенційних форм. Переходи згідно цих форм відповідають пунктам визначення системи модельних множин. Кожна непримітивна формула на шляху $\wp$ рано чи пізно буде спрощена чи розкладена згідно відповідної форми. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконується пункт МС.

Візьмемо деяку множину A таку, що $|A|=|W|$, та деяку ін'єктивну $\delta\in{}^{V}\!A$ з $im(\delta)=W$. Така δ є бієкцією W на A. Нехай $W_\alpha=nm(H_\alpha)$, тоді δ_α є бієкцією W_α на A_α.

Задамо значення базових предикатів на δ і на іменних множинах вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$.

Якщо ${}_{\alpha|-}p\in H_\alpha$, то $p_\alpha(\delta)=T$; якщо ${}_{\alpha-|}p\in H_\alpha$, то $p_\alpha(\delta)=F$.

Якщо ${}_{\alpha|-}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in H_\alpha$, то $p_\alpha(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta))=T$; якщо ${}_{\alpha-|}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in H_\alpha$, то $p_\alpha(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta))=F$.

В усіх інших випадках значення $p_\alpha(d)$ задаємо довільно (достатньо розглядати $d\in A_\alpha^{W_\alpha}$). При цьому враховуємо еквітонність і обмеження стосовно неістотності імен: для всіх $d,h\in A_\alpha^{W_\alpha}$ таких, що $d\|-\mu(p)=h\|-\mu(p)$, необхідно $p_\alpha(d)=p_\alpha(h)$. Так, задані значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю на відповідні $h\in{}^{W}\!A$.

Для атомарних чи формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ твердження теореми випливають із визначення значень базових предикатів. Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з побудовою системи модельних множин (подібні доведення в [4]).

Теорема 4 (повноти). Нехай $\Gamma\models\Delta$. Тоді секвенція ${}_{|-}\Gamma{}_{-|}\Delta$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ (тобто $\Gamma \models_M \Delta$ для кожної узгодженої ТМС M), проте $\Sigma = {}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Звідси (теорема 3) $H_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$ – система модельних множин. За теоремою 3 існують ТМС $M = (S, R, A, Jm)$ та $\delta \in {}^V\!A$: ${}_{\alpha|-}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$ та ${}_{\alpha-|}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$. Зокрема, це вірно для формул секвенції ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$. Тому для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ маємо $\Phi_\alpha(\delta) = T$ та для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$ маємо $\Psi_\beta(\delta) = F$. Це заперечує $\Gamma \models_M \Delta$, тому $\Gamma \not\models \Delta$. Отримали суперечність. Отже, припущення про невивідність ${}_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ невірне, що й доводить теорему.

Висновки

У роботі досліджено транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки часткових предикатів. Для таких логік розглянуто властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій основі побудовано секвенційні числення чистих першопорядкових темпоральних і мультимодальних логік еквітонних предикатів. Особливістю пропонованих числень є використання нових секвенційних форм елімінації модальностей та форм елімінації кванторів під реномінаціями. Для побудованих числень доведено теореми коректності та повноти.

Проведене дослідження планується продовжити в плані побудови секвенційних числень для темпоральних і мультимодальних логік кванторно-екваційного рівня.

Література

1. Eds. Abramsky S. Handbook of Logic in Computer Science : in 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford : Clarendon Press, 1994 – 2000.
2. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С. Никитченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16-31.
3. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
4. Шкільняк О.С. Композиційно-номінативні модальні та темпоральні логіки: семантичні властивості, секвенційні числення / О.С. Шкільняк // Наукові записки НаУКМА. Серія: Комп'ютерні науки. – 2008. – Т. 86. – С. 25-34.
5. Шкільняк О.С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2009. – № 4. – С. 11-23.
6. Нікітченко М.С. Побудова модальних логік темпорального та епістемічного типу на основі композиційно-номінативного підходу / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 204-211.
7. Шкільняк О.С. Композиційно-номінативні мультимодальні логіки / О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Штучний інтелект. – 2011. – № 4. – С. 126-133.

Literature

1. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [Eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford: Clarendon Press, 1994-2000.
2. Nikitchenko N.S. Probl. programmirovania. 1999. № 1. S. 16-31.
3. Nikitchenko M.S. Matematychna logika ta teoria algorytmiv. K.: VPC Kyivskyi universytet. 2008. 528 s.
4. Shkilniak O.S. Nauk. zapysky NaUKMA. Ser.: Komp. nauky. 2008. V. 86. S. 25-34.
5. Shkilniak O.S. Probl. programuvannia. 2009. № 4. S. 11-23.
6. Nikitchenko M.S. Visnyk Kyiv. un-tu. Ser.: phiz.-mat. nauky. 2011. Vyp. 3. S. 204-211.
7. Shkilniak O.S. Shtuchnyi intelect. 2011. № 4. S. 126-133.

RESUME

O.S. Shkilniak

Sequent Calculi for Temporal and Multimodal Logics of Partial Predicates

Modal logics are successfully used in computer science and programming. Temporal logics are used in dynamic systems modelling, program specification and verification. Epistemic logics are used for information systems description, in data bases and knowledge bases. Traditional modal logics are usually based on classical predicate logic. However, classical logic has fundamental limitations. Thus, it makes topical the problem of construction of new program oriented logical formalisms. Composition-nominative modal logics (CNML) are one of such formalisms. Modal transitional logics (MTL) are an important variant of CNML; they represent the fact of changing and evolution in subject domains.

In this paper we consider pure first-order MTL. We distinguish multimodal (MML) and temporal (TML) composition-nominative logics. In MML we specify general and epistemic MTL. Semantic models and languages for MTL are defined; properties of logical consequence relations for sets of state-specified formulas are studied. Such properties are a semantic basis for construction of sequent calculi for pure first-order TML and MML. This construction is the goal of the paper. The particularity of the specified calculi is introducing of new sequent forms for elimination of modalities and elimination of quantifiers under renominations. The paper presents basic sequent forms for this calculi and the proof of the soundness and completeness theorems.

Soundness theorem. Let a sequent $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ is derivable. Then $\Gamma \models \Delta$.

For the proof of the completeness theorem we use the Hintikka sets method. We prove the theorem about a countermodel, whence we have the completeness theorem.

Theorem about a countermodel. Let $\wp$ is a non-closed path in the sequent tree, H_α is a set of specified with $_{\alpha|-}$ or $_{\alpha-|}$ formulas of sequents of the path $\wp$, M is a union of all the schemes of models of the universe of the path $\wp$, let $\mathrm{H}_M = (\{H_\alpha \mid \alpha \in S\}, M)$. Then exist MTS $M = (S, R, A, Jm)$ and $\delta \in {}^V\!A$ with $im(\delta) = nm(\mathrm{H}_M)$ such that:

1) $_{\alpha|-}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$; 2) $_{\alpha-|}\Phi \in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$.

Completeness theorem. Let $\Gamma \models \Delta$. Then a sequent $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ is derivable.

Стаття надійшла до редакції 08.11.2012.